Soyons rationnels!

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $v(n)$ le plus grand entier k tel que $\dfrac{n}{2^k}$ soit un entier.
On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence, en posant $u_1 = 1$ puis, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_{n-1} = 0\,; \\ 1 + 2v(n) - \dfrac{1}{u_{n-1}} & \text{si } u_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

1) Donner la valeur des entiers $v(1)$, $v(2)$, $v(3)$ et $v(4)$.
2) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $v(n) = 0$ si n est impair et que $v(n) = v\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1$ si n est pair.
3) Calculer les huit premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et vérifier que $u_8 = 4$.
4) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que u_n est un nombre rationnel strictement positif, que $u_{2n} = u_n + 1$ et que $u_{2n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.
5) Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un terme u_n.
6) Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un unique terme u_n.